MARYAN SMOLUCHOWSKI.

O POWSTAWANIU ŻYŁ PODCZAS WYPŁYWU CIECZY.

(Z 7 RYCINAMI).

KRAKÓW
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI.
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO.
POD ZARZĄDEM JÓZEFA FILIPOWSKIEGO.
1904.

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności.
Serya III. Tom 1. Dział A.

Ogólnego zbioru tom 41 A.

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności.
Serya III. Tom 2. Dział A.

Ogólnego zbioru tom 42 A.

MARYAN SMOLUCHOWSKI.

O POWSTAWANIU ŻYŁ PODCZAS WYPŁYWU CIECZY.

(Z 7 RYCINAMI).

KRAKÓW
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI.
DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO.
POD ZARZĄDEM JÓZEFA FILIPOWSKIEGO.
1904.

Osobne odbicie z Rozpraw Wydziału matematyczno-przyrodniczego Tom XLIV.
Serya A. Akademii Umiejętności w Krakowie.

O powstawaniu żył podczas wypływu cieczy

przez

Maryana Smoluchowskiego.

(Z 7 rycinami).

Wniesiono na posiedz. Wydz. mat.-przyr. z d. 11 lipca 1904; ref. czł. Witkowski.

I.

Jednem z najpowszedniejszych a przecież jeszcze nie dostatecznie wyświetlonych zjawisk hydromechaniki jest tworzenie się żył wodnych (Wasserstrahl, veine d'eau, water jet) występujące zwykle, gdy woda z dostateczną prędkością przepływa przez wązki otwór.

Że ciecz wypływająca przez otwór w dnie naczynia, skupia się tworząc promień mniej lub więcej walcowaty, zamiast rozpływać się na wszystkie strony, możnaby sobie jeszcze wytłómaczyć działaniem ciężkości i napięcia włoskowatego, jeżeli zewnątrz znajduje się powietrze; wszak siły te mogą nawet w dalszym ciągu powodować rozdzielanie się żyły na szereg kropli.

Ale wiadomo, że zupełnie podobne zjawisko można też zauważyć, używając cieczy zabarwionej, jeżeli zewnętrzna przestrzeń jest zapełniona cieczą, a to samo odnosi się do przypadku analogicznego aeromechaniki (słup dymu uchodzącego z komina, struga pary z wypustu parowego), gdzie wspomniane czynniki żadnej roli nie odgrywają.

Zdawałoby się, że klasyczna „idealna“ hydrodynamika nie daje możności wytłómaczenia tego zjawiska, ponieważ według niej rozkład prądu cieczy musiałby być analogicznym do rozkładu prądu elektrycznego, którego właśnie przeciwnie cechuje dążność do wy-

pełnienia liniami prądu całej przestrzeni konduktora. Tymczasem Helmholtz [1]) zauważył, w czem leży różnica obu przypadków. W hydromechanice bowiem musi być jeszcze spełniony warunek, że ciśnienie nigdzie nie może spaść poniżej wartości zera, do czego niema analogii w elektryczności; zamiast przekroczyć tę granicę ciecz musi się rozerwać i powstanie powierzchnia nieciągłości (Discontinuitätsfläche).

Ponieważ ciśnienie hydrodynamiczne zmniejsza się z wzrostem prędkości według wzoru:

$$p = p_0 - \varrho \frac{v^2}{2}, \tag{1}$$

a prędkość v przy każdej krawędzi, matematycznie ostrej, musiałaby osiągnąć wartość nieskończoną, przeto każda taka krawędź musi wytworzyć powierzchnię owego rodzaju. We wyżej wspomnianym przykładzie trzeba sobie wyobrazić według Helmholtza, że woda rozrywa się przy krawędzi otworu, a powierzchnia owa, w której ciśnienie jest zero, oddzielając wodę szybko się poruszającą od zewnętrznej nieruchomej wody (totes Wasser), tworzy zjawisko, które właśnie określamy nazwą żyły wodnej.

Teorya ta w przypadku ruchu dwuwymiarowego daje sposobność do bardzo zręcznego użytkowania funkcyi argumentów zespolonych, i dzięki temu powstał cały szereg poszukiwań teoretycznych za szczególnymi kształtami takich żył, tworzących nowy dział hydromechaniki, pod względem matematycznym zapewne bardzo interesujący [2]).

Zdaje się jednak, że nie wykonano dotychczas żadnych doświadczeń w celu sprawdzenia podstaw owej teoryi. A trzeba zauważyć, że nie została ona ogólnie uznaną; zwłaszcza Lord Kelvin [3]) stanowczo się oświadcza przeciwko przyjęciu powierzchni nieciągłości.

Istotnie przyjęcie takiej powierzchni, gdzie stykają się dwie części cieczy o różnych (stałych!) prędkościach może być usprawiedliwione wobec cieczy idealnych ale w żadnym razie nie może być stosowane do rzeczywistych cieczy, obdarzonych lepkością, gdzie tarcie

---

[1]) Berl. Ber. 1868 p. 215, Ges. Abhdlg. I. p. 146.

[2]) Kirchhoff Crelle J. 70 (1869), Abhdlg. p. 416; Rayleigh Phil. Mag. 5 p. 430 (1876); Michell Phil. Trans. 1890; Réthy Beibl. 1895 p. 679; Bobyleff etc.

[3]) Nature 50 p. 524—597 (1894).

musiałoby wywołać nieskończenie wielkie naprężenie styczne w owych miejscach i musiałoby natychmiast wyrównać owe różnice prędkości [1]). Pojęcie takich powierzchni może być czasami użyteczną fikcyą matematyczną, ale trzeba zawsze zbadać, czy wnioski na jej podstawie wysnute, nie mają także tylko wartości fikcyjnej.

Do tego nasuwa się poważna wątpliwość, czy taki ruch, gdyby był nawet możliwy, mógłby być trwałym (stabil), ale tej kwestyi obecnie nie będziemy roztrząsać, ponieważ i tak jeszcze doświadczenia nas nań naprowadzą. Zauważyć jednak trzeba, że użycie równań cieczy idealnych w tych przypadkach dlatego przedewszystkiem nie może być dozwolone, ponieważ takie ciecze ślizgałyby się wzdłuż ścian bez tarcia, podczas gdy rzeczywiste ciecze nieruchomo do nich przylegają, a więc też niema przyczyny, czemuby ciśnienie przy krawędziach miało spadać aż do zera.

Z drugiej strony, jak to na innem miejscu zauważyłem [2]), z samych równań hydrodynamiki — ale oczywiście tylko uwzględniając lepkość — wynika już zasadnicza właściwość omawianych tu zjawisk, t. j. asymetrya linij prądu (w szczególności zmniejszenie ich rozbieżności) względem ściany tworzącej przegrodę, w której się znajduje otwór przepływu.

Dopóki ruch jest dostatecznie powolny, tak że drugie potęgi prędkości pominąć można w porównaniu z pierwszemi, równania ruchu:

$$(2)\qquad \varrho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]= -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \text{ i t. d.}$$

pozostają niezmienione przez podstawienie $-u$, $-v$, $-w$, a $-p$, na miejscu u, v, w, p; linie prądu zatem nie zmieniają swego kształtu (tylko kierunek) przy odwróceniu spadku ciśnienia, czyli muszą być symetryczne z obu stron otworu, jeżeli ściany są symetryczne.

W miarę jednak jak prędkość wzrasta i wyrażenia bezwładnościowe się uwydatniają, możliwość tego podstawienia znika i ruch staje się asymetryczny. Łatwo też dojść do wniosku, rozważając wpływ tych dwóch czynników, że skutkiem dodatkowych wyrażeń

---

[1]) Patrz np. Lamb Hydrodynamics p. 541.

[2]) Rozpr. Akad. Umiejęt. 43 p. 77 (1903).

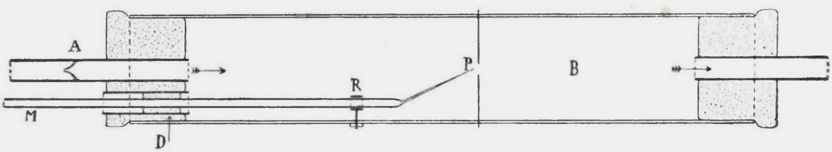
bezładnościowych będzie właśnie taka zmiana ruchu, jaka się uwydatnia w żyłach wodnych.

Ażeby więc rozstrzygnąć, czy według naszego przypuszczenia tworzenie się żył polega na współdziałaniu bezwładności i lepkości, czy też w myśl teoryi Helmholtza na rozdzieraniu się cieczy i na powstawaniu powierzchni nieciągłości, przedsięwziąłem szereg doświadczeń poniżej opisanych.

II.

Metoda doświadczalna polegała na znanym sposobie [1]) wpuszczania barwika w pewnym punkcie do cieczy przepływającej wskutek czego odpowiednia linia prądu występuje jako barwna struga i może być wygodnie obserwowana i odrysowana.

Jako najprostszy i najlepiej dający się określić przypadek został obrany wypływ przez mały otwór w bardzo cienkiej płaskiej ścianie. Ściana była reprezentowana przez sztywną blaszkę miedzianą (grubości 0·095 mm) tworzącą przegrodę między dwiema częściami rury szklanej (o średnicy 45 mm), których końce zostały na płasko oszlifowane i do blaszki szczelnie przykitowane. Otwór w środku blaszki, przez który ciecz miała przepływać, miał kształt koła o średnicy 2·45 mm, a krawędzie jego były nieco zaokrąglone.



Ryc. 1.

Przeciwległe końce rur szklanych zamknięto korkami, przez które przeprowadzone były rurki służące do przypływu i odpływu cieczy. Ponieważ okazało się, że prędkości wymagane są bardzo małe, użyłem do hamowania ruchu rurki kształtu A, z wewnątrz wlutowanym końcem o wązkim otworze, co się okazało bardzo dogodnem. Prędkość ruchu cieczy regulowano przez nastawienie zbior-

[1]) Oberbeck Wied. Ann. 2 p. 1 (1877); Reynolds Phil. Trans. 1883; Marey Journ. Phys. 1 p. 192 (1902) i inni.

nika, z którego wypływała do przyrządu, w odpowiedniej wysokości; mierzono ją licząc ilość kropli uchodzących z rurki odpływowej w danym czasie i redukując to na miarę bezwzględną zapomocą osobnego oznaczenia przeciętnego ciężaru kropli.

Do wprowadzenia barwika służyła rurka *M*, zaopatrzona przy końcu długim, a nadzwyczaj cienkim włosem i prowadzona zapomocą pierścienia *R* i dławika *D* w ten sposób, że koniec *P*, przez który barwik wypływał, można było przysunąć lub odsunąć od przegrody, a równocześnie obracając rurkę koło swej osi, zbliżyć lub oddalić od otworu w bocznym kierunku.

Mały zbiornik barwika był umieszczony na nieco wyższym poziomie i ciśnienie hydrostatyczne wyciskało zawartość jego w bardzo drobnych ilościach tak, żeby mowy być nie mogło o zakłóceniu linij prądu. Jako barwika używałem nieco rozrzedzonego atramentu niebieskiego (blaue Metalltinte, Günther u. Wagner) poprzednio starannie przefiltrowanego, którego gęstość oznaczoną została na 1·00085 w 17° C., a z tą liczbą została zrównana gęstość wody przepływającej przez dodanie drobnej ilości (0·12%) soli.

Przyrząd tak zestawiono, że punkt *P* i środek otworu były na równym poziomie; wskutek tego struga barwna sięgająca od *P* przez otwór do naczynia *B* znajdowała się w płaszczyźnie poziomej, i w takiej samej pozycyi okazywał się jej obraz na papierze leżącym na stole, wytworzony przez promienie światła pionowo spadające i odbijające się od źwierciadełka poniżej skośnie nastawionego i pryzmatu zupełnie odbijającego.

Wpływ zakłócający przypadkowych prądów konwekcyjnych, do góry lub na dół skierowanych, w takiem ustawieniu oczywiście najmniej występuje, a może być także w każdej chwili skontrolowany przez sprawdzenie, o ile struga barwna występuje z płaszczyzny poziomej.

Te prądy, powstające wskutek zmienności temperatury otoczenia, wiele wogóle sprawiają kłopotu w tych doświadczeniach, jeżeli prędkość przepływu jest bardzo mała. Dlatego okazało się także koniecznem, w celu ustalenia temperatury, otoczyć przyrząd płaszczem wodnym, tj. szerszą rurą, którą się za każdym razem tą samą cieczą napełniało, co wewnętrzne naczynie. Zresztą trudności te znacznie się zmniejszają, używając cieczy o większej lepkości, zwłaszcza że wtedy, jak to później zobaczymy, należy caeteris paribus używać większych prędkości przepływu.

Oprócz tych ostrożności, co do zmienności temperatury, należało zwracać uwagę na absolutną czystość używanych cieczy, gdyż najdrobniejszy pyłek wystarczył do zatkania rurki *P* lub otworu *A*, a przy poniżej opisanych doświadczeniach pod zmniejszonem ciśnieniem na staranne uszczelnienie wszystkich przewodów i przyrządu samego.

III.

Wyniki tych doświadczeń są streszczone w następującem zestawieniu:

1) Wyraźne tworzenie się żył wypływu — t. j. zmniejszenie rozbieżności strug wypływowych — występuje już przy nadzwyczaj małej prędkości (we wodzie prędkość przeciętna w otworze 0·5 $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$) Do tego bezpośrednia obserwacya wykazywała, że prędkość [1]) na osi żyły jest stosunkowo większa, a na zewnątrz ku ścianom naczynia maleje, podczas gdy Helmholtza teorya przeciwnie żąda największej prędkości na powierzchni żyły, i to prędkości przynajmniej czternastu metrów na sekundę, ażeby ciśnienie atmosferyczne mogło zostać przezwyciężone.

2) Wspomniane wyżej obliczenia Helmholtza i innych badaczy, odnoszą się tylko do założenia najprostszego: nieskończenie cienkich ścian i matematycznie ostrych krawędzi.

W rzeczywistości wskutek zaokrąglenia krawędzi musiałaby istnieć graniczna prędkość, poniżej której wypływ odbywałby się zupełnie normalnie (analogicznie do rozkładu prądu elektrycznego), a powyżej której musiałoby nastąpić rozerwanie cieczy i zjawisko żyły.

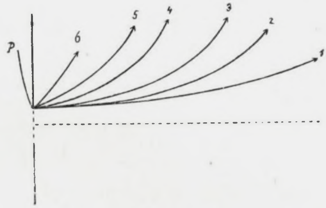
Tymczasem doświadczenia wykazały zupełnie ciągłą zmianę w kształcie linij prądu, gdy prędkość przepływu wzrastała. Uwydatnia to rycina 2, wyobrażająca linię prądu wychodzącą z punktu *P* położonego z boku przed otworem, przy rozmaitej prędkości wypływu, mianowicie:

1) 0·90, 2) 0·80, 3) 0·71, 4) 0·55, 5) 0·43, 6) 0·24 $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

---

[1]) Osądzać można prędkości w różnych punktach według cienkości strugi barwnej albo też obserwując ruch szeregu obłoczków barwnych, wytwarzających się wskutek lekkich wstrząśnień naczynia.

Uderzająca jest zależność kształtu części poza otworem leżącej od miary prędkości, podczas gdy zmiany przedniej części tak były drobne, że nie mogły być uwydatnione w rysunku. Zgodnie z uwagami naszemi co do wpływu lepkości i bezwładności asymetrya

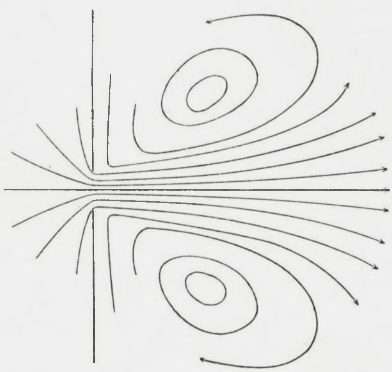


Ryc. 2.

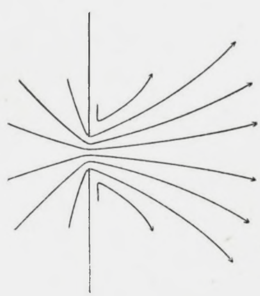
uwydatnia się co raz więcej przy rosnącej prędkości, podczas gdy kształt strugi odpowiadającej najmniejszej prędkości mało tylko odbiega od symetryi.

To stopniowe zanikanie symetryi linij prądu i stopniowe skrzywianie się strug wypływających w żyłę, w miarę rosnącej prędkości, jeszcze wyraźniej występuje w rycinach 3, 4, 5, 6 odpowiadających prędkościom: 0·90, 0·45, 0·23, 0·14 $\frac{cm}{sec}$.

Są one wynikiem całego szeregu rysunków, z których każdy otrzymany został przez superpozycyę strug wytworzonych przy pewnej prędkości. wskutek przesuwania punktu *P*.



Ryc. 3.



Ryc. 4.

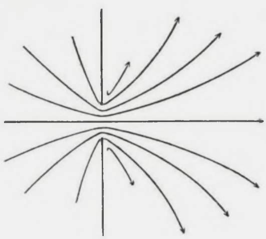
Zauważyć należy zwłaszcza tworzenie się pierścieni wirowych po za otworem, uwydatniające się dobrze w ryc. 3, które obserwo-

wałem, odwracając kierunek przepływu tak, że punkt wypływu P znajdował się po stronie żyły wypływu.

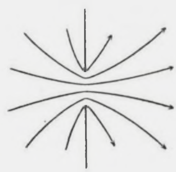
Daje to możność ścisłego określenia pojęcia powierzchni żyły, a mianowicie nazywamy tak powierzchnię, która wychodząc z krawędzi otworu, oddziela linie prądu pochodzące z przedniej części przestrzeni od zamkniętych, wirowych linij należących do tylnej części.

Oczywistą też rzeczą, że ciecz otaczająca uczestniczy w ruchu żyły, choć w słabszym stopniu, i nic nie wskazuje na nieciągłość prędkości.

Przy mniejszej prędkości wiry te szybko się zmiejszają, wraz z asymetryą obrazu; w ryc. 5 jeszcze wyraźnie widać zbieżność bocznych linij prądu tuż poza otworem, ale wobec prędkości $0{\cdot}14\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, ryc. 6, która już ledwie ślady asymetryi wykazuje, nic z tego nie dało się spostrzedz.



Ryc. 5.



Ryc. 6.

3) Ponieważ według Helmholtza krytyczna prędkość, przy której nastąpić musi rozerwanie, jest określona przez warunek, że ciśnienie u krawędzi otworu spada do zera, zatem określając znakiem p_0 ciśnienie w naczyniu przed otworem wypływowym:

$$v = \sqrt{\frac{2p_0}{\varrho}} \tag{3}$$

więc oczywiście zjawisko żył musiałoby wystąpić przy tem mniejszej prędkości, czem mniejsze jest ciśnienie wewnętrzne p_0.

Ażeby zbadać prawdziwość tego wniosku, połączyłem zbiornik, z którego ciecz wypływała, naczynie do którego spływała, jako też naczynie, z którego uchodził barwik, rurami wiodącemi do flaszki,

z której powietrze można było wypompować zapomocą pompy wodotryskowej [1]).

Tym sposobem, niezmieniając ciśnień względnych, a zatem prędkości prądu, mogłem obniżyć dowolnie wartość bezwzględną ciśnienia. Doświadczenia w różnych warunkach powtarzane, przy których ciśnienie p_0 spadało od 75 cm do 7 cm rtęci, żadnej jednak nie wykazały różnicy w kształcie linij prądu, co stanowczo dowodzi, że teorya Helmholtza wobec tych zjawisk nie może być zastosowana.

4) W teoryi owej jedynie gęstość cieczy wchodzi w rachubę, o ile ona wpływa (według (1)) na wielkość ciśnienia hydrodynamicznego; lepkość cieczy jest zupełnie obojętna. Według naszego przypuszczenia jednak właśnie stosunek gęstości do lepkości, t. t. ruchliwość cieczy jest miarodajną.

Znając mianowicie specyalne rozwiązanie równań (2) cieczy o spółczynnikach μ_1, ϱ_1, możemy je także spełnić, używając cieczy μ_2, ϱ_2 jeżeli dobierzemy $u_2 = u_1 \frac{\mu_2 \varrho_1}{\mu_1 \varrho_2}$ i t. d., $\Delta p_2 = \frac{\mu_2^2 \varrho_1}{\mu_1^2 \varrho_2} \Delta p_1$, $t_2 = t_1 \frac{\mu_1 \varrho_2}{\mu_2 \varrho_1}$; będzie to wtedy ruch „dynamicznie podobny“ [2]).

Jeżeli zatem nasze tłomaczenie zjawiska żył, opierające się wyłącznie na owych równaniach, jest prawdziwem, to kształt linij prądu musi zależeć od lepkości, ale musi pozostać niezmieniony, jeżeli używając cieczy mniej ruchliwej, zwiększymy prędkość prądu w odwrotnym stosunku ruchliwości, do czego znów potrzeba zmiany ciśnienia w stosunku $\frac{\mu_2^2 \varrho_1}{\mu_1^2 \varrho_1}$.

Rzeczywiście sprawdziłem tę regułę, używając oprócz wody roztworów gliceryny o dwojakiem stężeniu (mniej więcej 37·5% i 45·8%) i barwików odpowiednio gliceryną zaprawionych, aż do osiągnięcia równej gęstości.

Względne spółczynniki lepkości temperatury pokojowej: 19·5°, mierzone zapomocą zwykłej metody rurek włoskowatych i z nich obliczone spółczynniki podobieństwa $\alpha = \frac{\mu_2 \varrho_1}{\mu_1 \varrho_2}$ były następujące:

---

1) Z powodu wydobywania się baniek powietrza z wody pod nizkiem ciśnieniem lepiej jest używać wody przegotowanej.

2) Patrz Smoluchowski: O metodzie podobieństwa dyn. etc. Prace mat.-fiz. XV. p. 115 (1904).

Gliceryna I; gęstość 1·094; lepkość względna 3·38; $\alpha = 2·895$.
Gliceryna II; gęstość 1·116; lepkość względna 5·02; $\alpha = 4·20$.

Doświadczenia wykonane z temi cieczami okazały taką zgodność, że systemy krzywych otrzymane przy odpowiednich [według (4)] prędkościach można było superponować. Tak np. ryc. 3 otrzymaną została we wodzie przy prędkości 0·90 $\frac{cm}{sec}$, a także w gliceżrynie I przy prędkości 2·58 $\frac{cm}{sec}$, t. j. 2·87 razy większej, co zupełnie się zgadza z spółczynnikiem podobieństwa $\alpha = 2·895$; podczas gdy prędkość 0·90 $\frac{cm}{sec}$ (uwzględniając różnicę gęstości 0·86), którąby według Helmholtza warunku powinna być odpowiednią wobec gliceryny I, zupełnie odmienny obraz wytwarza, odpowiadający średniemu przypadkowi między ryc. 4 i ryc. 5.

Tak samo na przykład stwierdzono identyczność ryc. 4, otrzymanej przy odpowiednich prędkościach we wszystkich trzech cieczach.

Przy wyrysowaniu ryc. 6, już a priori zrobiłem użytek z tego podobieństwa dynamicznego, używając obrazu otrzymanego przy odpowiedniej prędkości w glicerynie II, ponieważ we wodzie czystej przypadkowe prądy konwekcyjne już tak bardzo odczuć się dawały przy tym powolnym ruchu, że tylko początkowe i środkowe części linij nadawały się do wyrysowania.

Nawiasem zauważę, że to zdaje się być wogóle pierwszem doświadczalnem stwierdzeniem geometrycznej identyczności ruchów dynamicznie podobnych.

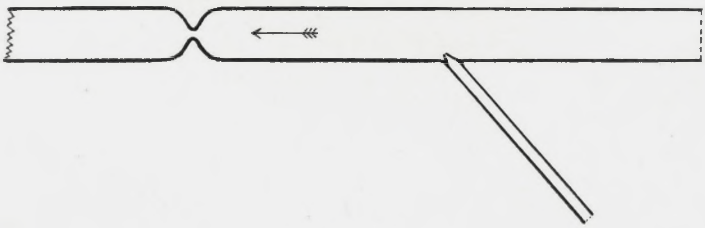
Także przybliżone pomiary ciśnienia zgadzały się z warunkiem (4), ale nie wchodzimy tutaj w te szczegóły jako nie należące do właściwego tematu.

IV.

Podczas gdy doświadczenia powyższe niewątpliwie dowodzą, że przyczyną tworzenia się żył wypływu w owych przypadkach jest współdziałanie bezwładności i lepkości, przecież zdaje się z drugiej strony być rzeczą pewną, że także zasadnicza myśl Helmholtza: zmniejszenie się ciśnienia w otworze i możliwość rozerwania się cieczy przy dostatecznem podwyższeniu prędkości, nie jest bezpodstawną — wszak tym sposobem tłómaczymy sobie np. działanie

pompy wodotryskowej — i dlatego pożądanem było uzupełnienie owych doświadczeń przez zbadanie zjawisk zachodzących przy znacznie większych prędkościach, gdzie oczekiwać można było spełnienia owych przewidywań.

Ponieważ do takich doświadczeń aparat powyżej opisany się nie nadawał, skonstruowałem przyrząd bardzo prosty i wytrzymały (ryc. 7): rurkę szklaną (średnicy 8·4 mm) zwężyłem w jednem miejscu tak, że pozostał tylko wązki kanał, o ile możności regularny [którego rozmiary w przekroju najwęższym, nieco eliptycznym, zmierzone po ukończeniu doświadczeń, przecięciu rurki i stosownem oszlifowaniu wynosiły 0·93 mm i 1·00 mm], a do górnej części przylutowałem wązkie boczne połączenie służące do wpuszczenia barwika lub połączenia z manometrem.



Ryc. 7.

Przedewszystkiem przyrząd ten, do zbadania praw powolnego przepływu, został połączony wspólnie z diafragmem, podobnem do rurki *A* ryc. 1, ze zbiornikiem nieco wyżej położonym. Strugi barwika wpuszczonego wykazały wyraźne cechy żył wodnych już przy prędkości $6{\cdot}1 \frac{cm}{sec}$ w zwężeniu) t. j. $0{\cdot}082 \frac{cm}{sec}$ w szerokiej części rury). Podczas gdy przyprędkości $2{\cdot}4 \frac{cm}{sec}$ asymetrya już znikła, to z drugiej strony przy prędkości $8{\cdot}3 \frac{cm}{sec}$ powstała już żyła walcowata, na 3 cm długa, otoczona wirami i okazująca pewne zjawiska peryodycznych drgań.

Oczywiście, że wobec tak małych prędkości, a zwłaszcza wobec nieznacznej krzywizny ścian otworu mowy być nie może jeszcze o zjawiskach Helmholtza, a przecież powstają typowe „żyły“.

Następnie przyrząd ten górnym końcem bezpośrednio został

przytwierdzony do wypustu wodociągowego, a dolny koniec połączono z dużą flaszką, w której pompa wodotryskowa mogła obniżać ciśnienie i która równocześnie służyła do mierzenia prędkości przepływu wody.

Przed doświadczeniem oczywiście cała rurka została wypełniona wodą. Skoro wówczas kurek wodociągu został otwarty, okazało się rzeczywiście przy pewnej prędkości zjawisko przewidywane: rozrywanie się żyły wodnej, czy też odrywanie się jej od otaczającej wody, tuż za zwężeniem, widoczne wskutek odbicia się światła od powierzchni wewnątrz powstających.

Ale nie jest to bynajmniej zjawiskiem ciągłem lecz peryodycznem, czego dowodzi równocześnie powstający brzęczący odgłos; także gołem okiem widać częste przerwy zjawiska, a zawsze okazuje się wielka nieregularność w jego występowaniu. Przy odpowiedniem regulowaniu dopływu z wodociągu można było oznaczyć przybliżenie prędkość, przy której ono występowało, na 24 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ w przekroju, podczas gdy warunek (3) wymagałby prędkości 26 lub 14·4 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, zależnie czy za p_0 — t. j. ciśnienie panujące w nieruchomej części cieczy — podstawi się wartość tegoż powyżej lub poniżej zwężenia.

Gdy się zmniejszyło ciśnienie poniżej zwężenia do 35·5 cm, zapomocą pompy wodnej, rozrywanie okazało się już przy prędkości 14 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, a gdy obniżenie postąpiło do 25·5 cm już przy 12 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, podczas gdy z owego rachunku wypadałyby liczby 19 lub 9·7 i 14 lub 8·2 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Równocześnie zmienia się wygląd zjawiska: przy zwykłem ciśnieniu atmosferycznem woda uchodząca, zupełnie przeźroczysta aż do osiągnięcia owej krytycznej prędkości, przyjmuje wygląd mętny po jej przekroczeniu, co pochodzi z wydzielenia się drobnych baniek powietrza; przy nizkiem ciśnieniu powstają duże bańki, w gwałtowny sposób, jak gdyby woda się gotowała.

Możnaby przypuścić, że prędkość owa będzie „krytyczną“ także w innym sensie, mianowicie, że prędkość po przekroczeniu tej granicy niezależna będzie od wielkości ciśnienia poniżej zwężenia, ponieważ poza otworem i tak zawsze to samo ciśnienie zero panować powinno.

Tymczasem doświadczenie nie potwierdziło tego przypuszczenia, przeciwnie wykazało zawsze wzrost prędkości ruchu wskutek zwiększenia ciśnienia górnego lub zmniejszenia ciśnienia dolnego. Tłomaczy się to zapewne temi samemi przyczynami, którym przypisać należy różnicę obliczonych i znalezionych krytycznych prędkości: charakterem niestatecznym, drgającym całego zjawiska i lepkością cieczy, która pogardza wszelkiemi obliczeniami opartemi na abstrakcyi cieczy idealnych.

V.

Ostateczne konkluzye, wynikające z tych doświadczeń, streścimy jeszcze w kilku słowach:

Zjawisko Helmholtza, t. j. rozrywanie się cieczy uchodzącej z ciasnego otworu, rzeczywiście może wystąpić, jeżeli prędkość jej jest bardzo znaczna (przeszło dwadzieścia metrów w naszych doświadczeniach), ale jest to drugorzędnem zjawiskiem, nie mającem nic do czynienia z powstawaniem żył wypływu, występującem już przy prędkościach kilkaset razy mniejszych.

Doświadczenia te zresztą oczywiście wcale nie popierają hipotezy powstawania powierzchni nieciągłości (w znaczeniu używanem przez Helmholtza), którą uważam za niedopuszczalną z powodów teoretycznych, poprzednio wyłuszczonych.

Wogóle teorya Helmholtza jest teoretycznie bardzo interesująca, ponieważ wskazuje możliwość powstawania żył wypływu w cieczach idealnych, ale zastosowanie jej do cieczy rzeczywistych, nawet przy owych prędkościach, nie jest usprawiedliwione, na co wskazuje fakt, że ów ruch wcale nie jest stateczny lecz peryodyczny [1]) i że prędkości krytyczne obliczone tak źle się zgadzają z pomiarami bezpośrednimi.

Sądzę, że jest to przypadek analogiczny do oporu ciał poruszanych w cieczy, gdzie rachunki oparte na „idealności“ cieczy i nie uwzględniające rozpraszania energii ani przylegania do ścian, do zupełnie mylnych prowadzą wniosków.

Co do powstawania „żył wypływu“ doświadczenia wykazały, że stosują się do nich prawidła podobieństwa dynamicznego, co jest

---

[1]) To będzie w związku z ruchami kłębującymi (turbulents) i z powstawaniem tonów w piszczałkach.

ważnym argumentem, przemawiającym za naszem zdaniem, że zjawiska te są objęte zwykłemi równaniami cieczy lepkich, i że tłómaczą się wpływem bezwładności cieczy, uwydatniającym się co raz więcej, w miarę powiększenia prędkości, obok wpływu lepkości.

Na podstawie tych prawideł można wnioskować z rysunków ryc. 3, 4. 5, 6 o zachowaniu się rozmaitych cieczy, o dowolnej gęstości i lepkości; a tak samo też możemy przepowiedzieć wpływ rozmiarów otworu, mianowicie: prędkości odpowiednie muszą być odwrotnie proporcyonalne do rozmiarów otworu, zatem „żyła“ tem łatwiej powstanie, czem większy otwór [1]).

Objaśnienie całej kwestyi oczywiście nie może być jeszcze uważane za zupełne, dopóki obliczenie kształtu strug nie zostanie wykonane na podstawie naszej teoryi — zadanie, do którego jeszcze zamierzam powrócić w przyszłości.

[1]) Grubość ściany i kształt naczynia zapewne aż do pewnej granicy będą obojętne dla tych zjawisk.

Z instytutu fizycznego uniwersytetu we Lwowie.

70—77). — L. Bruner: O mechanizmie katalitycznego działania jodu na bromowanie (Studya dynamiczne nad bromowaniem ciał aromatycznych. Cz. III) (str. 78—98). — T. Godlewski: O ciśnieniu osmotycznem niektórych roztworów, obliczonem na podstawie sił elektromotorycznych ogniw koncentracyjnych (2 tabl.) (str. 99—116). — S. Niementowski: Amidynowe pochodne bezwodnika antranilowego (str. 117—137). — L. Bier i L. Marchlewski: Studya nad barwikami roślinnymi i zwierzęcymi. I. Absorbcya promieni ultrafioletowych przez barwiki żółciowe i proteinochrom (4 tabl. i 2 ryc.) (str. 138—150). — A. Korczyński i L. Marchlewski: Studyum nad izatyną (3 tabl.) (str. 151—169). — K. Żorawski: O pewnych zmianach długości liniowych elementów podczas ruchu ciągłego układu materyalnych punktów. Część druga (str. 170—211). — K. Żorawski: Uwaga o pochodnych nieskończenie wielkiego rzędu (str. 212—215). — W. Syniewski: O budowie skrobi (10 rycin w tekscie) (str. 216—262). — W. Syniewski: O działaniu formaldehydu na skrobię i o połączeniu jodu z amylodekstryną (1 tabl.) (str. 263—271). — E. Kraft: Badania doświadczalne nad skalą barw interferencyjnych (1 ryc. i 4 tabl.) (str. 272—323). — W. Baczyński i S. Niementowski: Studya nad bromowaniem benzimidazolów (str. 324—391). — K. Zakrzewski: O oscylacyi krążka w płynie lepkim (str. 392—398). — Wł. Natanson: O funkcyi dysypacyjnej płynów lepkich (str. 399—404). — Wł. Natanson: O odkształcaniu krążka plastyczno-lepkiego (str. 405—423). — St. Bądzyński i K. Panek: O kwasie alloksyproteinowym prawidłowym składniku moczu ludzkiego (str. 424—432). — J. Zaleski: Badania nad mezoporfiryną (str. 433—451). — S. Niementowski: O kwasie chloraldwuantranilowym (str. 452—456). — K. Olszewski: Przyrządy do skroplenia powietrza i wodoru (str. 457—470). — L. Marchlewski: Przyczyna bierności optycznej wodnych roztworów kwasu antiwinowego (str. 471—472).

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności. Serya III. Tom 3. Dział A.

Br. Pawlewski: O działaniu chlorku tionylu na oksimy i własnościach kamferonitrylu (str. 1—7). — C. Russjan: Kilka twierdzeń z teoryi wyznaczników (str. 8—13). — St. Zaremba: Uwagi o pracach Profesora Natansona nad teoryą tarcia wewnętrznego (str. 14—21). — K. Dziewoński: O dekacyklenie (trójnaftylenbenzolu) nowym węglowodorze i czerwonym związku siarkowym, dwunaftylentiofenie (str. 22—38). — S. Zaremba: O metodach średniej arytmetycznej Neumanna i Robina w przypadku, gdy ograniczenie nie jest spójne (str. 39—70). — M. Smoluchowski: O zjawiskach aerodynamicznych i połączonych z nimi objawach cieplnych (str. 71—106). — M. Smoluchowski: Przyczynek do teoryi endosmozy elektrycznej i kilku zjawisk pokrewnych (str. 110—127). — R. Załoziecki: O nitrowaniu niżej wrzących frakcyj ropy galicyjskiej (str. 128—137). — B. Pawlewski: Bezpośrednia synteza α-fenylobenzimidazolu (str. 138—141). — K. Olszewski: Nowy przyrząd do skraplania wodoru (1 ryc.) (str. 142—147). — J. Puzyna: O sumach nieskończenie wielu szeregów potęgowych i o twierdzeniu Mittag-Lefflera z teoryi funkcyi (str. 148—178). — Wł. Natanson: O zastosowaniu równań Lagrange'a w teoryi tarcia wewnętrznego (str. 179—194). — Wł. Natanson: O stopniu przybliżenia pewnych równań w teoryi tarcia wewnętrznego (str. 195—222). — St. Zaremba: O pewnem uogólnieniu klasycznej teoryi tarcia wewnętrznego (str. 223—246). — St. Zaremba: O pewnem zagadnieniu hydrodynamiki będącem w związku ze zjawiskiem podwójnego załamiania światła w cieczach odkształcanych i rozbiór pracy prof. Natansona o tym przedmiocie (str. 247—266). — Wł. Gorczyński: Badania nad przebiegiem rocznym insolacyi (str. 267—350). — C. Russjan: Metoda Pfaffa całkowania równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Część I. (str. 351—396). — K. Reutt i Br. Pawlewski: O kondensacyi oksimów z hydrazynami oraz o własnościach hydrazonów (str. 397—

407). — K. Dziewoński: O dekacyklenie (trójnaftylenbenzolu), nowym węglowodorze aromatycznym i czerwonym związku siarkowym, dwunaftylentiofenie (str. 408—418). — Wł. Satke: Względna wilgotność w Tarnopolu (tabl. I.) (str. 419—434). — L. Marchlewski: Z chemii chlorofilu. O filoetrynie (tabl. II.) (str. 435—439). — L. Bruner i St. Tołłoczko: O szybkości rozpuszczania się ciał stałych (4 ryc.) (str. 440—481). — St. Zaremba: O pewnej postaci doskonalszej teoryi relaksacyi (str. 482—502). — St. Zaremba: Zasada ruchów względnych i równania mechaniki fizycznej (Odpowiedź prof. Natansonowi) (str. 503—510). — C. Russjan: Metoda Pfaffa całkowanie równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Część druga. (str. 511—576). — J. Kowalski i Br. Zdanowski: Nowa metoda mierzenia oporów płynnych i kilka jej zastosowań (1 ryc.) (str. 577—594). — W. Natanson: Uwagi nad teoryą zjawiska zluźniania (str. 595—615). — Errata (str. 617).

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności. Serya III. Tom 4. Dział A.

Treść zeszytu I, II i III.

K. Dziewoński: O fenylacenaftylmetanie, nowym węglowodorze aromatycznym (str. 1—11). Wł. Natanson: O pewnej właściwości podwójnego załamania światła w cieczach odkształcanych, mogącej posłużyć do wyznaczania ich czasu zluźniania (3 ryc.) (str. 12—33). — I. Mościcki: Badania nad wytrzymałością dielektryków (9 ryc.) (str. 34—53). — I. Mościcki i M. Altenberg: O stratach dielektrycznych w kondensatorach pod wpływem działania prądów przemiennych (6 ryc.) (str. 54—75). — E. Bandrowski i A. Prokopeczko: O działaniu benzolu na azoksybenzol w obecności chlorku glinowego (str. 76—82). — K. Zakrzewski: O położeniu osi optycznych w cieczach odkształconych (2 ryc.) (str. 83—89). — K. Dziewoński: O budowie β-fenylacenaftylmetanu i jego pochodnych: kwasu β-benzylnaftalowego i kwasu β-benzoylnaftalowego (str. 90—104). — T. Estreicher: O własnościach fizycznych tlenu w nizkich temperaturach. Część I i II. (6 ryc.) (str. 105—132). — Wł. Natanson: Uwagi nad pracami prof. Zaremby, tyczącemi się teoryi podwójnego załamania światła w cieczach odkształcanych (str. 133—143). — M. Smoluchowski: O powstawaniu żył podczas wypływu cieczy (7 ryc.) (str. 144—157). — T. Godlewski: O dyssocyacyi elektrolitów w roztworach alkoholowych (str. 158—192).

Rozprawy Wydziału mat.-przyrod. wychodzą od r. 1901 w dwóch działach: A. (nauki matematyczno-fizyczne), B. (nauki biologiczne).

Każdy dział będzie wychodzić w zeszytach, obejmujących o ile możności cały materyał posiedzenia miesięcznego Wydziału (których jest 10 do roku), w całych arkuszach druku z ciągłą paginacyą. Z końcem roku dołączona zostanie do ostatniego zeszytu każdego działu karta tytułowa i spis prac w tomie zawartych. Bez względu na możliwą ilość materyału, zawartego w tomie, ilość rycin lub tablic, cena tomu z działu A. wynosić będzie tylko 8 kor., a z działu B. 10 kor. rocznie — w Królestwie Polskiem dział A. 3 rs., a dział B. 4 rs. rocznie.

Skład główny; na Galicyę: — Księgarnia Spółki wydawniczej w Krakowie; na Królestwo Polskie: Księgarnia Gebethnera i Wolffa w Warszawie.